



# Finite Element Approximation of a Geometrically Exact Shell Model

Patrick Le Tallec, Maïté Carrive-Bedouani, Jean Mouro

## ► To cite this version:

Patrick Le Tallec, Maïté Carrive-Bedouani, Jean Mouro. Finite Element Approximation of a Geometrically Exact Shell Model. [Research Report] RR-2504, INRIA. 1995. inria-00077194

**HAL Id: inria-00077194**

**<https://inria.hal.science/inria-00077194>**

Submitted on 29 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

***Approximations par Eléments Finis d'un  
modèle de coques géométriquement exact***

Maïté Carrive-Bédouani , Patrick Le Tallec , Jean Mouro

**N° 2504**

Mars 1995

PROGRAMME 6

 ***apport  
de recherche***





## Approximations par Éléments Finis d'un modèle de coques géométriquement exact

Maïté Carrive-Bédouani\*, Patrick Le Tallec\*\*, Jean Mouro\*\*\*

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique  
Projet MENUSIN

Rapport de recherche n° 2504 — Mars 1995 — 31 pages

**Résumé :** Le but de cet article est de développer des modèles éléments finis de coques non linéaires en grands déplacements. L'originalité de l'approche proposée consiste à travailler dans une base cartésienne fixe tout au cours du mouvement. Après une brève description du modèle de coque géométriquement exact utilisé, cet article introduit deux approximations par éléments finis qui ont été développées pour l'occasion. La première utilise un élément fini conforme d'Argyris, la seconde des triangles de type DKT. Le comportement de ces modèles est illustré par quelques calculs significatifs.

**Mots-clé :** Coques non linéaires. Grands déplacements. Modèles géométriquement exacts. Base cartésienne. Hyperélasticité. Elements Finis. Triangle d'Argyris. Triangle DKT.

*(Abstract: pto)*

\*. Université de Paris Dauphine et INRIA Rocquencourt

\*\* INRIA Rocquencourt

\*\*\* PSA Peugeot-Citroën et INRIA-Rocquencourt

Unité de recherche INRIA Rocquencourt

Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

Téléphone : (33 1) 39 63 55 11 – Télécopie : (33 1) 39 63 53 30

# Finite Element Approximation of a Geometrically Exact Shell Model

**Abstract:** The purpose of this work is to develop finite element models for geometrically exact nonlinear shells. The originality of our approach is to work in a fixed cartesian basis. After a brief introduction of the shell model, the paper presents two finite elements approximations specially developed for this problem. The first uses conforming Argyris triangles, the second develops nonlinear DKT triangles. Both models are validated by several numerical tests.

**Key-words:** Nonlinear shells. Geometrically exact models. Large displacements. Cartesian basis. Hyperelasticity. Finite Elements. Argyris triangle. DKT triangle.

## 1 Introduction

De nombreux problèmes industriels récents se posent en terme d'interactions fluides-structures en grands déplacements. A titre d'exemple, certains composants hydrauliques utilisés dans les amortisseurs automobiles comportent des clapets souples qui se déforment sous la pression de l'huile en écoulement. Le réglage de ces clapets est délicat et nécessite de comprendre comment la déformation des clapets est couplée à l'écoulement de l'huile minérale. Le même type de problème se retrouve en biomécanique pour le calcul d'écoulements sanguins dans des artères déformables ou en aéronautique pour l'étude des vibrations aéroélastiques de grandes amplitudes.

Pour tous ces problèmes, il est essentiel d'avoir une description aussi fine que possible de la géométrie du solide déformé. Ce solide est assimilable le plus souvent à une coque en grands déplacements. L'étude de ces coques par analyse classique en base locale est délicate car le mouvement de la base locale au cours de la déformation est difficile à gérer et toute approximation à ce niveau fausse fortement le résultat du problème couplé. Pour cette raison, notre approche utilise le modèle de coques géométriquement exact écrit indépendamment de toute base locale, tel qu'il est proposé par J.C. Simo et D.D. Fox [15], et complété par le travail de M. Carrive [4]. Nous nous plaçons ici dans le cadre des coques minces et proposons une approximation de ce modèle en **base cartésienne**, ou bien par des éléments finis conformes d'Argyris, ou bien par des éléments finis non conformes de type DKT [1].

Après une brève description du modèle de coque géométriquement exact utilisé, cet article introduit les deux approximations par éléments finis qui ont été développées pour l'occasion, et illustre leur comportement par quelques calculs significatifs.

## 2 Le Modèle

### 2.1 Introduction

Une coque est un objet tridimensionnel dont l'une des dimensions caractéristiques (l'épaisseur) est faible par rapport aux deux autres. A l'aide d'hypothèses cinématiques adéquates, l'étude de cet objet et de ses déformations se ramène à un problème bidimensionnel formulé sur sa surface moyenne en configuration de référence.

Le modèle de coques minces géométriquement exact présenté prend pour inconnue principale la position de la surface moyenne de la coque et de sa normale à chaque instant. Il s'écrit indépendamment de toute base locale (calcul intrinsèque) et calcule les déformations de manière exacte même en présence de grands déplacements.

ments (aucune approximation de la géométrie, transport exact). Après linéarisation, il se réduit au modèle de coque mince de Koiter [9].

**Remarque :** une plaque est une coque dont la configuration au repos est plane et qui ne subit, au départ, que des déformations de flexion. Dans le cas de grands déplacements, une plaque résiste aussi en membrane après déformation et se comporte donc dès lors comme une coque.

## 2.2 Cinématique

L'hypothèse cinématique fondamentale du modèle est celle des fibres indéformables. Autrement dit, on définit dans une configuration initiale donnée la surface moyenne  $\omega_o$  de la coque et un champ de vecteurs directeurs unitaires normaux

$$\underline{t}^o : \omega_o \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

tel que tout point  $M$  de la coque s'y décompose en

$$M = m + \xi \underline{t}^o(m), m \in \omega_o, \xi \in [-e(m), e(m)]. \quad (2)$$

On suppose ensuite que la position de chaque point  $M$  en toute configuration reste de la forme

$$\underline{x}(M) = \underline{\phi}(m) + \xi \underline{t}(m) = \underline{x}(m, \xi), \forall M. \quad (3)$$

Avec ce choix, la fibre des points matériels  $M$  associés à un point  $m$  donné de la surface moyenne se transporte sans déformation au cours du mouvement, et la configuration tridimensionnelle de la coque est après déformation

$$\mathcal{C} = \{\underline{x} = \underline{\phi}(m) + \xi \underline{t}(m), m \in \omega_o, \xi \in [-e(m), e(m)]\}. \quad (4)$$

Les inconnues caractérisant le mouvement sont les applications

$$\begin{aligned} \underline{\phi} : \omega_o &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \underline{t} : \omega_o &\rightarrow S^2. \end{aligned} \quad (5)$$

La quantité  $2e(m)$  représente l'épaisseur locale de la coque le long de la direction  $\underline{t}(m)$ .

**Remarque :** L'hypothèse des fibres indéformables n'est pas une hypothèse de comportement physique. La fibre peut se déformer dans le déplacement réel. On ignore simplement ici cette déformation en se contentant d'écrire les équations d'équilibre et les lois de comportement globalement par fibre.

### 2.3 Hypothèse de coque mince

Dans ce qui suit, nous supposons que la coque est infiniment rigide en cisaillement. En conséquence, chaque fibre  $\underline{t}$  reste normale à la surface moyenne au cours de la déformation (hypothèse de Kirchhoff). On a donc

$$\underline{t} \cdot \nabla \underline{\phi} = 0 ,$$

soit encore

$$\underline{t} = \underline{g}(\underline{\phi}) = \frac{\underline{\phi}_{,1} \times \underline{\phi}_{,2}}{|\underline{\phi}_{,1} \times \underline{\phi}_{,2}|} = \frac{1}{j} \underline{V} ,$$

avec  $j = |\underline{V}|$ , le jacobien de la transformation  $\underline{\phi}$ .

### 2.4 Mesure des déformations et des contraintes

On cherche à mesurer la déformation de la coque entre la configuration initiale et la configuration actuelle rapportée à une surface moyenne de référence  $\hat{\omega} = (\underline{\phi}^o)^{-1}(\omega_o)$  donnée. Pour cela, on introduit classiquement deux tenseurs surfaciques  $\underline{\varepsilon}$  et  $\underline{\rho}$  qui mesurent respectivement les variations d'étirement dans le plan tangent à la surface moyenne et les variations de courbure de la surface moyenne :

– **déformation de membrane**

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underline{C} - \underline{C}^o) = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\phi}^T \cdot \nabla \underline{\phi} - \nabla \underline{\phi}^{oT} \cdot \nabla \underline{\phi}^o) , \quad (6)$$

– **déformation de flexion**

$$\underline{\rho} = \underline{K} - \underline{K}^o = (\nabla \underline{\phi}^T \cdot \nabla \underline{t} - \nabla \underline{\phi}^{oT} \cdot \nabla \underline{t}^o) . \quad (7)$$

Ici  $\underline{C}$  mesure les dilatations dans le plan tangent à la surface moyenne,

et  $\underline{K}$  mesure les variations de la normale  $\underline{t}$  quand on parcourt la surface moyenne le long d'une ligne matérielle. C'est une mesure de la courbure de la coque.



**Remarque :** Par abus de notation, les inconnues  $\underline{\phi}$  et  $\underline{t}$  et la donnée  $\underline{t}^o$  sont dénotées de la même manière qu'on les définit sur la configuration initiale  $\omega_o$  ou qu'on les transporte sur la surface de référence  $\hat{\omega}$  par composition avec  $\underline{\phi}^{o-1}$ .

Avant d'écrire le principe des puissances virtuelles, on cherche aussi à exprimer le travail des efforts intérieurs en le décomposant en deux parties. La première donne le travail fourni dans une déformation de membrane, la deuxième dans une déformation de flexion.

On introduit donc les équivalents coque (pour notre modèle) du tenseur des contraintes de l'élasticité tridimensionnelle. Ces tenseurs  $\tilde{\mathbf{n}}_\omega$  et  $\mathbf{m}_\omega$  sont définis sur la configuration actuelle  $\omega = \underline{\phi}(\hat{\omega})$  et

- $\tilde{\mathbf{n}}_\omega$  mesure les résultantes des contraintes dans la surface moyenne,
- $\mathbf{m}_\omega$  mesure le moment de flexion par rapport à la surface moyenne.

## 2.5 Principe des Puissances Virtuelles et Formulation variationnelle

Comme nous l'avons décrit précédemment, sous l'hypothèse de cisaillement nul, l'ensemble des configurations cinématiquement admissibles de la coque est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{CA} = \{ (\underline{\phi}, \underline{g}(\underline{\phi})) : \hat{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2, \\ \underline{\phi} \text{ et } \underline{g}(\underline{\phi}) \text{ vérifient les conditions aux limites cinématiques} \}. \end{aligned}$$

On définit l'espace des variations  $(\underline{\delta\phi}, \underline{\delta t})$  cinématiquement admissibles de la configuration de la coque comme l'espace tangent à  $\mathcal{CA}$  autour de la configuration actuelle

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \{ (\underline{\delta\phi}, \underline{\delta t}) : \hat{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \underline{\delta t} = \nabla \underline{g}(\underline{\phi}) \cdot \underline{\delta\phi} \\ \underline{\delta\phi} \text{ et } \underline{\delta t} \text{ vérifient les conditions aux limites cinématiques} \}. \end{aligned}$$

A chaque variation  $\underline{\mathcal{V}} = (\underline{\delta\phi}, \underline{\delta t}) \in \mathcal{V}$  sont associés un étirement élémentaire  $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \underline{\phi}} \cdot \underline{\delta\phi}$  et une flexion élémentaire  $\delta\boldsymbol{\rho} = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial (\underline{\phi}, \underline{t})} \cdot (\underline{\delta\phi}, \underline{\delta t})$  de la surface moyenne.

On se place maintenant en configuration actuelle ( $\hat{\omega} = \omega$ ) et on suppose que les efforts intérieurs travaillent au cours du mouvement de la façon suivante :

*Dans toute variation élémentaire  $(\delta\phi, \delta\underline{t})$  de la configuration de la coque, les efforts intérieurs travaillent sous la forme :*

$$-d\mathcal{W}_i = \tilde{\mathbf{n}}_\omega : \delta\boldsymbol{\varepsilon}_\omega + \mathbf{m}_\omega : \delta\boldsymbol{\rho}_\omega,$$

où  $\tilde{\mathbf{n}}_\omega : \delta\boldsymbol{\varepsilon}_\omega$  est le travail intérieur des efforts de membrane dans l'étirement élémentaire  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_\omega$ ,

et  $\mathbf{m}_\omega : \delta\boldsymbol{\rho}_\omega$  est le travail intérieur des efforts de flexion dans la flexion élémentaire  $\delta\boldsymbol{\rho}_\omega$ .

D'après le principe des puissances virtuelles, le problème variationnel d'équilibre s'écrit alors en configuration actuelle

$$\mathcal{G}(\underline{\mathcal{V}}) = \int_\omega (\tilde{\mathbf{n}}_\omega : \delta\boldsymbol{\varepsilon}_\omega + \mathbf{m}_\omega : \delta\boldsymbol{\rho}_\omega)(\underline{\mathcal{V}}) d\omega - G_{ext}(\underline{\mathcal{V}}) = 0 \quad \forall(\underline{\mathcal{V}}) \in \mathcal{V}. \quad (8)$$

Ici,  $G_{ext}(\underline{\mathcal{V}})$  est la **somme des travaux des forces extérieures** i.e. :

$$G_{ext}(\underline{\mathcal{V}}) = \int_\omega (\underline{f} \cdot \delta\underline{\phi} + \underline{m} \cdot \delta\underline{t}) d\omega \quad (9)$$

$$+ \int_{\partial\omega} \underline{g}_n \cdot \delta\underline{\phi} d\Gamma + \int_{\partial\omega} \underline{g}_m \cdot \delta\underline{t} d\Gamma, \quad (10)$$

avec  $\underline{f}$  et  $\underline{g}_n$  (resp.  $\underline{m}$  et  $\underline{g}_m$ ) la densité des efforts (resp. moments) extérieurs.

Dans le cas d'un chargement en pression d'intensité  $\Delta P$ , on aura en particulier

$$G_{ext}(\underline{\mathcal{V}}) = \int_\omega \Delta P \underline{t} \cdot \delta\underline{\phi} d\omega. \quad (11)$$

## 2.6 Equations d'équilibre en configuration de référence

Dans cette formulation (8), les efforts, les déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}_\omega$  et  $\boldsymbol{\rho}_\omega$  et le domaine d'intégration  $\omega$  se rapportent à la configuration actuelle inconnue  $\omega$ . Cette formulation est donc indépendante du choix de la configuration de référence  $\hat{\omega}$ , mais est peu pratique pour les calculs.

Pour obtenir une formulation adaptée au calcul, il suffit ensuite de choisir une configuration de référence  $\hat{\omega}$  simple (une configuration plane ou une configuration initiale) et de ramener toutes les intégrations au domaine  $\hat{\omega}$ . Le problème prend alors la forme

$$\mathcal{G}(\underline{\mathbf{V}}) = \int_{\hat{\omega}} j(\tilde{\mathbf{n}} : \delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{m} : \delta \underline{\boldsymbol{\rho}})(\underline{\mathbf{V}}) d\hat{\omega} - G_{ext}(\underline{\mathbf{V}}) = 0, \quad \forall (\underline{\mathbf{V}}) \in \mathcal{V}. \quad (12)$$

Ci-dessus, les déformations  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  et  $\underline{\boldsymbol{\rho}}$  sont maintenant calculées sur la configuration de référence  $\hat{\omega}$  à l'aide des formules (6) et (7). Quant aux efforts intérieurs il se transportent suivant la formule classique

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}} &= (\nabla \underline{\phi})^{-1} \tilde{\mathbf{n}}_{\omega} (\nabla \underline{\phi})^{-T}, \\ \mathbf{m} &= (\nabla \underline{\phi})^{-1} \mathbf{m}_{\omega} (\nabla \underline{\phi})^{-T}. \end{aligned}$$

## 2.7 Lois de comportement et problème final

Pour résoudre notre problème, il nous faut enfin définir les lois de comportement reliant efforts intérieurs et déformations.

Nous postulons un comportement hyperélastique ; on montre alors [4] que nécessairement  $\tilde{\mathbf{n}}$  et  $\mathbf{m}$  dérivent d'un potentiel unique  $\psi = \psi(m, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \underline{\boldsymbol{\rho}})$  appelé énergie hyperélastique selon les lois de comportement hyperélastiques bidimensionnelles :

$$\begin{aligned} j\tilde{\mathbf{n}} &= j^o \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \\ j\mathbf{m} &= j^o \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\boldsymbol{\rho}}}. \end{aligned}$$

Ici,  $j^o$  (resp.  $j$ ) dénote le jacobien de la carte  $\underline{\phi}^o$  donnée (resp.  $\underline{\phi}$  inconnue) qui associe à tout point matériel  $m \in \hat{\omega}$  de la surface  $\hat{\omega}$  sa position initiale  $\underline{\phi}^o(m)$  (resp. actuelle  $\underline{\phi}(m)$ ). La connaissance de  $\underline{\phi}^o$  nous permet aussi de calculer la dilatation initiale  $\underline{\mathbf{C}}_o = (\nabla \underline{\phi}^o)^T \nabla \underline{\phi}^o$  et le vecteur normal initial  $\underline{\mathbf{t}}^o = \underline{\mathbf{g}}(\underline{\phi}^o)$ .

Si nous supposons que le matériau est élastique et isotrope et si on se place dans le cas de petites déformations et grands déplacements, l'énergie hyperélastique  $\psi$  est nécessairement de la forme classique

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}) &= \frac{E\epsilon^3}{24(1+\nu)} [ \text{Tr}(C_o^{-1} \boldsymbol{\rho} C_o^{-1} \boldsymbol{\rho}) + \frac{\nu}{1-\nu} (\text{Tr}(C_o^{-1} \boldsymbol{\rho}))^2 ] \\ &+ \frac{E\epsilon}{2(1+\nu)} [ \text{Tr}(C_o^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} C_o^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\nu}{1-\nu} (\text{Tr}(C_o^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}))^2 ] .\end{aligned}$$

Après report de ces lois de comportement dans les équations d'équilibre, le problème de calcul de l'équilibre d'une coque hyperélastique en grands déplacements prend la forme finale :

$$\begin{aligned}\text{Trouver } \underline{\phi} : \hat{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tel que} \\ \int_{\hat{\omega}} j^\circ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\rho}} : \delta \boldsymbol{\rho} \right) d\hat{\omega} - G_{ext}(\underline{\mathcal{V}}) = 0, \\ \forall (\delta \underline{\phi}, \delta \underline{\mathcal{L}}) \in \mathcal{V}.\end{aligned}\tag{13}$$

### 3 Discrétisation en Eléments Finis

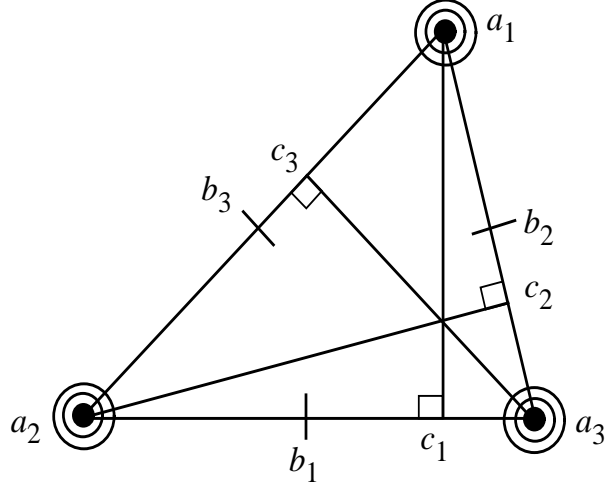
#### 3.1 Approximation par éléments Argyris

La résolution du problème de coque sans cisaillement par une méthode conforme nécessite une approximation par éléments finis de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur le domaine. En effet, les lois de comportement utilisent la courbure  $\boldsymbol{\rho}$  qui nécessite le calcul du gradient de la normale  $\underline{t}$  ( $\mathbf{K} = \nabla \underline{\phi}^T \cdot \nabla \underline{t}$ ), donc d'une dérivée seconde de  $\underline{\phi}$ . Nous avons choisi l'élément le plus précis, Argyris, qui réalise une interpolation de type Hermite à l'aide de polynômes de degré cinq.

Pour ce choix, la position  $\underline{\phi}$  de la coque est approchée sur chaque élément fini triangulaire  $T$  par

$$\underline{\phi}_{h/T} = \sum_{i=1}^3 [DLLC(\phi^i)]_{1 \times 21} [p]_{21 \times 1} \underline{e}_i.\tag{14}$$

Dans cette formule,  $[DLLC(\phi^i)]$  désigne l'ensemble des degrés de liberté sur la déformation  $\underline{\phi}_h$  dans la direction cartésienne  $\underline{e}_i$ , définis localement sur le triangle considéré, et a pour expression :

FIG. 1 - *Elément d'Argyris*

$$\left\{ \begin{aligned}
 [DLLC(\psi)] = & [(\psi(a_1) \ \psi(a_2) \ \psi(a_3) \ D\psi(a_1)(a_3 - a_1) \\
 & D\psi(a_1)(a_2 - a_1) \ D\psi(a_2)(a_1 - a_2) \ D\psi(a_2)(a_3 - a_2) \\
 & D\psi(a_3)(a_2 - a_3) \ D\psi(a_3)(a_1 - a_3) \ D^2\psi(a_1)(a_3 - a_1)^2 \\
 & D^2\psi(a_1)(a_1 - a_2)^2 \ D^2\psi(a_2)(a_1 - a_2)^2 \ D^2\psi(a_2)(a_2 - a_3)^2 \\
 & D^2\psi(a_3)(a_2 - a_3)^2 \ D^2\psi(a_3)(a_3 - a_1)^2 \ D^2\psi(a_1)(a_2 - a_3)^2 \\
 & D^2\psi(a_2)(a_3 - a_1)^2 \ D^2\psi(a_3)(a_1 - a_2)^2 \ D\psi(b_1)(a_1 - c_1) \\
 & D\psi(b_2)(a_2 - c_2) \ D\psi(b_3)(a_3 - c_3)].
 \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Par ailleurs,  $[p]$  représente les polynômes de base de l'élément et s'exprime en fonction des coordonnées barycentriques et des paramètres d'excentricité

$$\eta_i = 2 \frac{\overline{c_i b_i}}{\overline{a_{i-1} a_{i+1}}} \quad i = 1, 2, 3, \quad (16)$$

par la formule

$$[p]_{21 \times 1} = [A_0]_{21 \times 21} [\Lambda]_{21 \times 1} + \left[ \begin{array}{c|c} 0_{21 \times 18} & A_{\eta \ 21 \times 3} \end{array} \right] [\Lambda]_{21 \times 1}. \quad (17)$$

Ici,  $[A_0]$  et  $[\Lambda]$  sont définies comme suit :

$$A_0 = \frac{1}{4} \left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc} 4 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 0 & 0 & 0 & 60 & 60 \\ & 4 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 40 & 0 & 0 & 0 & 80 & 0 & 60 & 0 & 60 \\ & & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 40 & 0 & 0 & 80 & 60 & 60 & 0 \\ & & & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 34 & -20 \\ & & & & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & -20 & 34 \\ & & & & & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -20 & 0 & 34 \\ & & & & & & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 34 & 0 & -20 \\ & & & & & & & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -20 & 34 & 0 \\ & & & & & & & & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 16 & 0 & -20 & 34 & 0 \\ & & & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ & & & & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ & & & & & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ & & & & & & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ & & & & & & & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ & & & & & & & & & & & & & & & -2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & -2 & 2 & 2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & 64 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 64 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 64 \end{array} \right]$$

et

$$[A_\eta]_{21 \times 3} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 60\eta_2 & -60\eta_3 \\ -60\eta_1 & 0 & 60\eta_3 \\ 60\eta_1 & -60\eta_2 & 0 \\ 0 & 14\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -14\eta_3 \\ 0 & 0 & 14\eta_3 \\ -14\eta_1 & 0 & 0 \\ 14\eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -14\eta_2 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 - \eta_3 & \\ 0 & 0 & \eta_3 \\ -\eta_1 & 0 & 0 \\ \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_2 & 0 \\ \hline 0_{6 \times 3} \end{bmatrix}, \quad [\Lambda]_{21 \times 1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^5 \\ \lambda_2^5 \\ \lambda_3^5 \\ \lambda_1^4 \lambda_3 \\ \lambda_1^4 \lambda_2 \\ \lambda_2^4 \lambda_1 \\ \lambda_2^4 \lambda_3 \\ \lambda_3^4 \lambda_2 \\ \lambda_3^4 \lambda_1 \\ \lambda_1^3 \lambda_3^2 \\ \lambda_1^3 \lambda_2^2 \\ \lambda_2^3 \lambda_1^2 \\ \lambda_2^3 \lambda_3^2 \\ \lambda_3^3 \lambda_2^2 \\ \lambda_3^3 \lambda_1^2 \\ \lambda_1^3 \lambda_2 \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2^3 \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^3 \\ \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\ \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3^2 \\ \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Le problème discret est maintenant obtenu en reportant cette expression de  $\underline{\phi}_h$  (et de  $\delta \underline{\phi}_h$ ) dans le problème continu (13). Pour l'intégration numérique nous utiliserons le schéma de Lyness-Jespersen [11] à 16 points de Gauss.

L'élément d'Argyris a été utilisé par Bernadou [2] pour approcher le problème linéaire de Koiter et a été testé sur plusieurs exemples numériques [3]. Ces tests permettent de mettre en évidence sa robustesse et sa grande précision. On constate en particulier que la solution est souvent atteinte pour un maillage à deux éléments.

Par contre, sa mise en œuvre présente quelques inconvénients :

- L'espace des fonctions de base est l'ensemble des polynômes de degré 5 dont la dimension est 21, ce qui porte à 63 le nombre de degrés de liberté utilisés pour approcher localement les trois composantes de la position.
- La définition des degrés de liberté étant locale à chaque élément, il faut revenir à des degrés de libertés globaux pour réaliser l'opération d'assemblage.

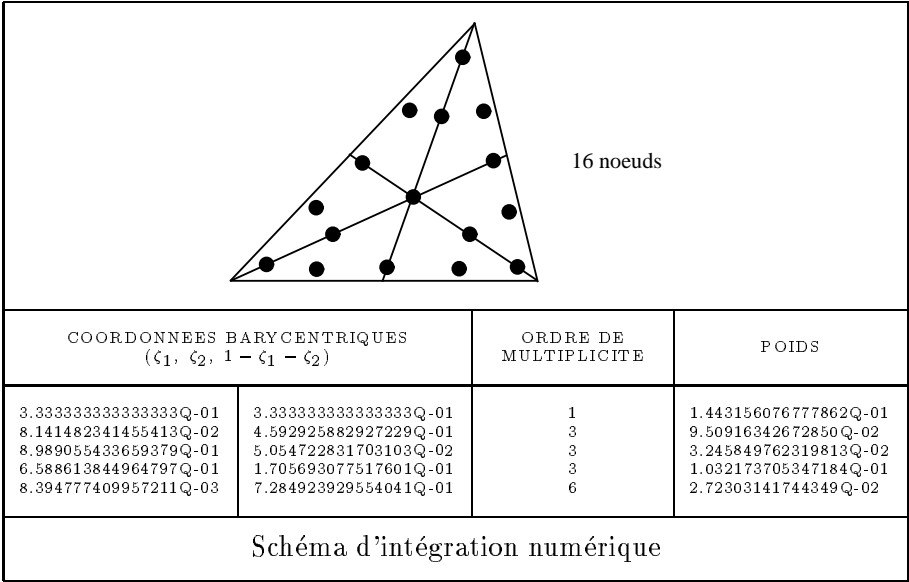


FIG. 2 - Schéma de Lyness-Jespersen à 16 points



- Les degrés de liberté utilisant la dérivée seconde n'ont pas d'interprétation mécanique et rendent difficile la prise en compte des conditions aux limites cinématiques.

### 3.2 Approximation par éléments DKT

Pour surmonter les difficultés techniques associées à l'élément fini d'Argyris, on se propose d'utiliser une approximation par éléments finis mixtes non conformes de type DKT (Discrete Kirchhoff Triangle). Dans ce cas, l'espace discret des solutions admissibles n'est pas inclus dans l'espace continu : ces éléments, largement utilisés dans les grands codes industriels, sont de classe  $C^0$ . Ils permettent cependant une approximation très fidèle des coques minces sans cisaillement.

La méthode DKT [1], [8] que nous généralisons ici pour des coques géométriquement exactes, consiste à approcher  $\underline{\phi}$  et son gradient indépendamment l'un de l'autre dans des espaces d'éléments  $C^0$ , et à introduire un certain nombre de contraintes sur l'espace discret en un nombre fini de noeuds de façon à satisfaire globalement le lien entre  $\underline{\phi}$  et son gradient. Ces contraintes sont les équivalents discrets des hypothèses de Kirchhoff-Love.

Pour rester cohérent avec la mécanique, le terme de membrane, qui ne fait intervenir que la dérivée première de  $\underline{\phi}$ , est calculé à l'aide du gradient exact de  $\underline{\phi}$ , tandis que le terme de flexion est calculé à l'aide du gradient DKT (ou approché) de  $\underline{\phi}$ .

#### Les hypothèses de "Kirchhoff-Love" discrètes

On note  $\underline{\phi}_h$  et  $\underline{q}_h$  les approximations de  $\underline{\phi}$  et  $\nabla \underline{\phi}$ . On parlera de **gradient exact** pour  $\nabla(\underline{\phi}_h)$  et de **gradient approché** pour  $\underline{q}_h = (\nabla \underline{\phi})_h$ . On a donc 3 + 6 inconnues en chaque point.

On définit  $a_{i(i=1..3)}$  les sommets d'un triangle quelconque  $T$  du maillage de  $\hat{\omega}$ ,  $\underline{\tau}_{T_k}$  et  $\underline{\nu}_{T_k}$  la tangente et la normale au  $k^{ième}$  côté  $\partial T_k$  à ce triangle et on introduit les coordonnées barycentriques  $\lambda_i$  sur ce triangle.

Pour approcher nos 9 inconnues, on choisit d'utiliser les espaces d'éléments finis P'3-Hermite pour chaque composante de  $\underline{\phi}$  et P2-Lagrange pour chaque composante de  $\nabla \underline{\phi}$  ce qui fait  $3 \times 9 + 6 \times 6 = 63$  degrés de liberté a priori par triangle. On se ramène à 27 degrés de liberté par triangle (9 par noeuds) en imposant les contraintes

suivantes sur le gradient approché :

- **18 contraintes aux sommets**  $a_k$ ,  $k = 1..3$  : le gradient approché de  $\underline{\phi}$  est exact aux sommets de chaque triangle :

$$q_h^{i\alpha}(a_k) = \partial_\alpha \phi^i(a_k); \quad (18)$$

- **9 contraintes normales moyennes sur les côtés  $\partial T_k$  du triangle** : le gradient approché normal à un côté est linéaire et est donc uniquement déterminé par ses valeurs aux sommets :

$$(\underline{q}_h - [\nabla(\underline{\phi}_h)(a_i)]\lambda_i) \cdot \underline{\nu}_{T_k} = 0 \text{ sur } \partial T_k; \quad (19)$$

- **9 contraintes tangentielles intégrales sur les côtés  $\partial T_k$  du triangle** : le gradient tangentiel est en moyenne exact sur chaque côté

$$\int_{\partial T_k} (\underline{q}_h - \nabla(\underline{\phi}_h)) \cdot \underline{\tau}_{T_k} dT = 0.$$

Du fait du choix de l'élément fini pour  $\underline{q}_h$ , ces dernières contraintes sont vraies localement et l'on peut écrire :

$$(\underline{q}_h - \nabla(\underline{\phi}_h)) \cdot \underline{\tau}_{T_k} = 0 \text{ sur } \partial T_k. \quad (20)$$

Ce choix de contraintes nous permet de calculer  $\underline{q}_h$  en fonction de  $\underline{\phi}_h$  et d'obtenir une expression analytique assez simple du gradient approché en fonction des degrés de liberté de  $\underline{\phi}$ .

### Expression du gradient approché

Pour plus de simplicité, nous travaillons séparément le long de chaque direction cartésienne et notons

$$u = \phi_h^i$$

$$\underline{\theta} = \underline{q}_h^i = i^{\text{ème}} \text{ colonne de } \underline{q}_h.$$

Dans les espaces d'éléments finis choisis,  $u_{/T}$  et  $\underline{\theta}_{/T}$  s'expriment sur chaque triangle par

$$u = \sum_i u(a_i) \lambda_i + b_{i,i+1} \lambda_i \lambda_{i+1} + c_{i,i+1} \lambda_i^2 \lambda_{i+1}$$

$$\underline{\theta} = \sum_i \underline{\theta}(a_i) \lambda_i + 4 \underline{\theta}_{i,i+1} \lambda_i \lambda_{i+1}.$$

La prise en compte des contraintes de Kirchhoff-Love discrètes nous permet alors de simplifier l'expression de  $\underline{\theta}$ :

- les 6 contraintes aux noeuds permettent d'exprimer  $\underline{\theta}(a_i)$  en fonction de  $\underline{\nabla} u(a_i)$ .  
On a donc

$$\underline{\theta}(a_i) = \underline{\nabla} u(a_i) ;$$

- les 3 contraintes “normales” permettent de lier les 2 composantes de  $\underline{\theta}$  entre elles. Elles expriment que  $\underline{\theta}_{i,i+1}$  est nécessairement colinéaire au vecteur  $\underline{a_i a_{i+1}}$ :

$$\underline{\theta} = \sum_i \underline{\nabla} u(a_i) \lambda_i + 4 \alpha_{i,i+1} \lambda_i \lambda_{i+1} \underline{a_i a_{i+1}};$$

- les 3 contraintes “tangentes” permettent d'écrire sur chaque côté du triangle l'équation différentielle  $\partial_s u = \underline{\theta} \cdot \frac{\underline{a_i a_j}}{|\underline{a_i a_j}|}$  qui s'intègre facilement pour donner explicitement  $\alpha_{ij}$  en fonction des degrés de liberté de  $u$ :

$$u(a_j) - u(a_i) = \frac{1}{2} [\underline{\nabla} u(a_i) + \underline{\nabla} u(a_j)] \cdot \underline{a_i a_j} + \frac{2}{3} \alpha_{ij} |\underline{a_i a_j}|^2 .$$

Finalement, on obtient

$$\underline{\theta} = \sum_i \underline{\nabla} u(a_i) \lambda_i + 6 \nabla_{i,i+1}^2(u) \lambda_i \lambda_{i+1} \frac{\underline{a_i a_{i+1}}}{|\underline{a_i a_{i+1}}|} , \quad (21)$$

où

$$\nabla_{ij}^2(u) = \frac{1}{|\underline{a_i a_j}|} [u(a_j) - u(a_i) - \frac{1}{2} [\underline{\nabla} u(a_i) + \underline{\nabla} u(a_j)] \cdot \underline{a_i a_j}]$$

est une moyenne de la dérivée seconde de  $u$  sur  $\underline{a_i a_j}$ .

Ce gradient approché ainsi construit possède des propriétés particulières :

- il est continu en tout point du contour d'un élément avec une variation linéaire pour  $(\nabla \underline{\phi})_h \cdot \underline{\nu}$  et quadratique pour  $(\nabla \underline{\phi})_h \cdot \underline{\tau}$ ,

- il dépend de la géométrie du triangle considéré (en configuration  $\hat{\omega}$ ) car les hypothèses DKT ne sont pas affines invariantes (elles font intervenir les normales). En revanche,  $\nabla_{ij}^2$  est intrinsèque,
- il est exact pour un déplacement quadratique,
- il est invariant par rotation et par homotéthisme dans le plan du triangle.

**Remarque :** On reste cohérent avec le modèle de coque mince puisque les hypothèses de Kirchhoff-Love sont satisfaites en tout point du contour d'un élément. En outre, aucune interpolation de  $\underline{\phi}$  n'est nécessaire à l'intérieur de l'élément pour le calcul de la matrice de rigidité.

**Remarque :** Puisque l'on possède une expression analytique du gradient approché en fonction des degrés de liberté de  $\underline{\phi}$ , il nous suffit de discrétiser chacune des composantes de  $\underline{\phi}$  dans l'espace P'3-Hermite et de calculer explicitement ce gradient approché. Les degrés de liberté de l'élément sont donc les valeurs de la déformation et de ses gradients en chaque sommet (neuf valeurs par sommet).

**Remarque :** Le rotationnel  $\nabla \times (\nabla \underline{\phi})_h$  est non nul ; il est du même ordre que  $\nabla \underline{\phi}$ . Pour rester cohérent avec le fait que le gradient du gradient approché est une dérivée seconde de  $\phi$ , on symétrise les dérivées croisées dans  $\nabla(\nabla \underline{\phi}_h)$ .

### Implémentation

Pour plus de simplicité algébrique, on travaille d'abord avec des degrés de liberté locaux. Chaque composante  $\phi_h^i$  s'écrit donc sous la forme :

$$u(\underline{x}) = [u_{loc}]^T [p]$$

avec

$$[u_{loc}]^T = [u(a_1), u_{,\lambda_2}(a_1), u_{,\lambda_3}(a_1), u(a_2), u_{,\lambda_2}(a_2), u_{,\lambda_3}(a_2), u(a_3), u_{,\lambda_2}(a_3), u_{,\lambda_3}(a_3)] ,$$

et  $[p]$  la matrice colonne des 9 polynômes de base associés à ces degrés de liberté locaux calculés de façon à préserver la symétrie du triangle [1]

$$\begin{aligned}
p_1 &= \lambda_1^2(3 - 2\lambda_1) + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
p_2 &= \lambda_1^2\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
p_3 &= \lambda_1^2\lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
p_4 &= \lambda_2^2(3 - 2\lambda_2) + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
p_5 &= \lambda_2^3 - \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
p_6 &= \lambda_2^2\lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
p_7 &= \lambda_3^2(3 - 2\lambda_3) + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
p_8 &= \lambda_2\lambda_3^2 + \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
p_9 &= \lambda_3^3 - \lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3.
\end{aligned}$$

L'écriture du gradient approché dans la base  $(\lambda_2, \lambda_3)$  est plus simple que dans la base cartésienne  $(x, y)$  définie sur  $\hat{\omega}$ . On a en effet sur chaque triangle T

$$\left(\frac{\partial \phi^k}{\partial \lambda_\beta}\right)_h = \frac{\partial \phi^k}{\partial \lambda_\beta}(a_i)\lambda_i + \sum_{i < j} \nabla_{ij}^2(\phi)^k \left(\underline{a_i a_j} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial \lambda_\beta}\right) \lambda_i \lambda_j \quad \beta = 2..3.$$

Pour ce choix, le produit scalaire entre parenthèses est facile à calculer.

Puis, à l'aide du gradient de déformation du triangle considéré, on calcule les polynômes de base (et leurs dérivées) associés aux degrés de liberté globaux dans le repère cartésien. On peut alors écrire :

$$u(\underline{x}) = [u_{glob}]^T [P]$$

avec

$$[u_{glob}]^T = [u(a_1), u_x(a_1), u_y(a_1), u(a_2), u_x(a_2), u_y(a_2), u(a_3), u_x(a_3), u_y(a_3)].$$

**Remarque:** On utilisera ici un schéma d'intégration numérique à 3 points (le plus simple possible), exact pour des polynômes de degré 2 suivant la relation

$$\int_T f(\underline{x}) d\underline{x} = \sum_{k=1}^3 \omega_k f(\underline{x}_k).$$

Les 3 points sont les milieux des côtés du triangle T.

### 3.3 Ecriture et résolution du problème discret

Après discrétisation par éléments finis et développement de l'inconnue dans la base d'éléments finis choisie, le problème d'équilibre à résoudre est approché par

Trouver  $\underline{\phi}_h = \sum_{\vec{K}} \underline{\phi}_h^{\vec{K}} P_{\vec{K}}$  tel que

$$\mathcal{G}_{\vec{L}}(\underline{\phi}_h) = 0, \forall \vec{L} \in \{(i, l), i = 1..3, L = 1..N\}. \quad (22)$$

Ici  $\mathcal{G}_{\vec{L}}$  a pour expression

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\vec{L}}(\underline{\phi}_h) &= \mathcal{G}(\underline{\phi}_h, P_{\vec{L}}) \\ &= \int_{\hat{\omega}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(\underline{\phi}_h), \rho(\underline{\phi}_h)) : \varepsilon_{\vec{L}} + \frac{\partial \psi}{\partial \rho}(\varepsilon(\underline{\phi}_h), \rho(\underline{\phi}_h)) : \rho_{\vec{L}} \right) j^o d\hat{\omega} \\ &\quad - \int_{\hat{\omega}} \left( j\bar{n} \cdot P_{\vec{L}} + j\bar{m} \cdot t_{\vec{L}} \right) d\hat{\omega} \\ &\quad - \int_{\partial \hat{\omega}} j\bar{g}_n \cdot P_{\vec{L}} d\Gamma - \int_{\partial \hat{\omega}} j\bar{g}_m \cdot t_{\vec{L}} d\Gamma, \end{aligned}$$

où  $\varepsilon_{\vec{L}}$  et  $\rho_{\vec{L}}$  représentent la dérivée des déformations le long du vecteur de base global  $P_{\vec{L}}$ .

La méthode que nous avons choisie pour résoudre le problème d'équilibre discret (22) est la méthode de Newton-Raphson. Celle-ci consiste à remplacer, à chaque itération, dans l'équation ( $\mathcal{G} = 0$ ) la fonction  $\mathcal{G}$  par son développement limité à l'ordre 1 au voisinage du point  $\underline{\phi}_h^n$ . On obtient alors la procédure suivante :

$$\underline{\phi}_h^{n+1} = \underline{\phi}_h^n - \left[ \frac{\partial \mathcal{G}(\underline{\phi}_h^n)}{\partial \underline{\phi}_h} \right]^{-1} \cdot \mathcal{G}(\underline{\phi}_h^n) \quad (23)$$

que l'on écrit sous forme matricielle :

$$\underline{\phi}_h^{n+1} = \underline{\phi}_h^n - [A^n]^{-1} \cdot G^n. \quad (24)$$

Ici  $A^n$ , la matrice jacobienne, et  $G^n$ , le second membre, s'expriment dans la base  $\{P_{\vec{L}}\}$  par

$$\begin{aligned}
A_{\vec{L}\vec{K}}^n &= \frac{\partial G_{\vec{L}}(\underline{\phi}_h^n)}{\partial P_{\vec{K}}} \\
&= \int_{\hat{\omega}} j^o \left[ \varepsilon_{\vec{K}}^n : \frac{\partial^2 \psi(\underline{\phi}_h^n)}{\partial^2 \varepsilon} : \varepsilon_{\vec{L}}^n + \frac{\partial \psi(\underline{\phi}_h^n)}{\partial \varepsilon} : \varepsilon_{\vec{L}\vec{K}}^n \right] d\hat{\omega} \\
&\quad + \int_{\hat{\omega}} j^o \left[ \rho_{\vec{K}}^n : \frac{\partial^2 \psi(\underline{\phi}_h^n)}{\partial \varepsilon \partial \rho} : \varepsilon_{\vec{L}}^n + \varepsilon_{\vec{K}}^n : \frac{\partial^2 \psi(\underline{\phi}_h^n)}{\partial \varepsilon \partial \rho} : \rho_{\vec{L}}^n \right] d\hat{\omega} \quad (25) \\
&\quad + \int_{\hat{\omega}} j^o \left[ \rho_{\vec{K}}^n : \frac{\partial^2 \psi(\underline{\phi}_h^n)}{\partial^2 \rho} : \rho_{\vec{L}}^n + \frac{\partial \psi(\underline{\phi}_h^n)}{\partial \rho} : \rho_{\vec{L}\vec{K}}^n \right] d\hat{\omega} \\
&\quad + \int_{\hat{\omega}} j\bar{m} \cdot t_{\vec{L}\vec{K}} d\hat{\omega} + \int_{\partial\hat{\omega}} j\bar{g}_m \cdot t_{\vec{L}\vec{K}} d\hat{\Gamma} , \\
G_{\vec{L}}^n &= G_{\vec{L}}(\underline{\phi}_h^n) \\
&= \int_{\hat{\omega}} \left[ \frac{\partial \psi(\underline{\phi}_h^n)}{\partial \varepsilon} : \varepsilon_{\vec{L}}^n + \frac{\partial \psi(\underline{\phi}_h^n)}{\partial \rho} : \rho_{\vec{L}}^n \right] j^o d\hat{\omega} \\
&\quad - \int_{\hat{\omega}} \left( j\bar{L} \cdot P_{\vec{L}} + j\bar{m} \cdot t_{\vec{L}} \right) d\hat{\omega} \\
&\quad - \int_{\partial_n \hat{\omega}} j\bar{g}_n \cdot P_{\vec{L}} d\Gamma - \int_{\partial_m \hat{\omega}} j\bar{g}_m \cdot t_{\vec{L}} d\Gamma ,
\end{aligned} \tag{26}$$

$\varepsilon_{\vec{L}\vec{K}}$ ,  $\rho_{\vec{L}\vec{K}}$  et  $t_{\vec{L}\vec{K}}$  désignant les dérivées secondes de  $\varepsilon$ ,  $\rho$  et  $\underline{t} = g(\underline{\phi})$  dans les directions des fonctions de base

$$\varepsilon_{\vec{L}\vec{K}} = \nabla^2 \varepsilon[P_{\vec{L}}, P_{\vec{K}}] ,$$

$$\rho_{\vec{L}\vec{K}} = \nabla^2 \rho[P_{\vec{L}}, P_{\vec{K}}] ,$$

$$t_{\vec{L}\vec{K}} = \nabla^2 \underline{g}[P_{\vec{L}}, P_{\vec{K}}] .$$

## 4 Validation numérique

Nous avons effectué plusieurs tests afin de valider modèle et éléments finis. Les exemples que nous avons traités sont souvent utilisés dans la littérature. Ils sont intéressants car, soit on dispose d'une solution analytique (dans le cas petits déplacements), soit ils sont caractéristiques d'une coque qui résiste davantage en flexion (plaque) ou davantage en membrane.

### 4.1 La poutre en flexion sous un chargement uniforme

Ce test nous permet de valider notre modèle en flexion. On considère une plaque isotrope carrée de longueur  $l = 4$  mm et d'épaisseur  $e = 0,2$  mm. Le module de Young du matériau vaut  $E = 621.000$  MPa.

Cette plaque est encastrée sur l'un des côtés et on lui applique un chargement uniforme et normal  $P = 0,026$  bars.

Nous possédons une solution analytique de ce problème dans le cas d'une poutre en petits déplacements. Par un calcul classique de résistance des matériaux, on obtient le déplacement normal  $\nu$  (la flèche) en tout point d'abscisse  $x$  de la poutre :

$$\nu(x) = \frac{w}{24EI} [x^4 - 16x^3 + 96x^2]$$

où  $w$  est la densité de charge linéique qui vaut  $P \times l$ , et  $I$  est l'inertie en flexion de la poutre (second moment) qui vaut, pour une section rectangulaire  $l \times e$ ,  $I = \frac{le^3}{12}$ .

On compare notre calcul (DKT non linéaire) à la solution analytique et à la solution obtenue avec l'élément fini DKT Plaque implémenté dans le code Modulef. Les résultats sont quasi-identiques (fig. 3).

Il est remarquable de noter que sur cet exemple, les matrices de rigidité élémentaires obtenues avec notre élément et avec l'élément DKT Plaque sont rigoureusement identiques. Les différences de résultat sont dus à un traitement imparfait du second membre élémentaire pour l'élément DKT Plaque.

### 4.2 La toiture cylindrique de Scordelis-Lo

Ce test est caractéristique d'une coque qui résiste essentiellement en membrane.

On considère une toiture cylindrique de rayon de courbure  $R = 300$  inches, de longueur  $l = 600$  inches et d'épaisseur  $e = 3$  inches. Son module de Young vaut  $E = 30$  Mlb/in<sup>2</sup> et son coefficient de Poisson est supposé nul.



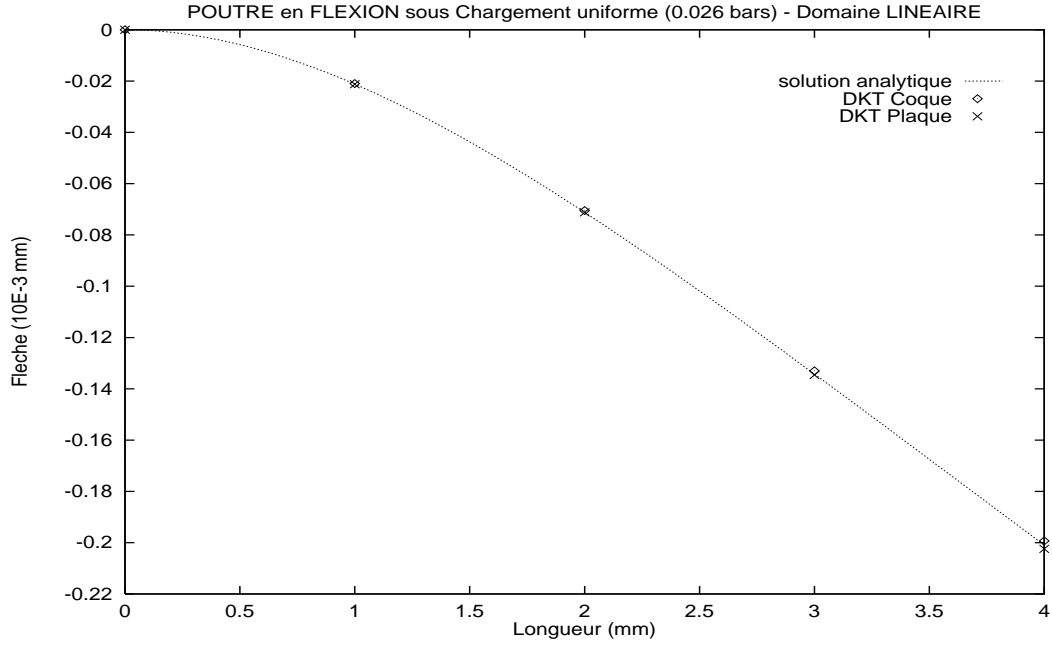


FIG. 3 - Poutre en flexion

Cette toiture est posée aux deux extrémités courbes et est soumise à un chargement uniforme assimilable à la gravité. Les symétries rencontrées permettent de ramener l'étude du problème à seulement 1/4 de la toiture.

On s'intéresse au déplacement du point central B et du point latéral C et l'on regarde la convergence vers la solution du problème linéaire (fig. 5).

### 4.3 La coque peu profonde de Simo

Ce test couple résistance en flexion et résistance en membrane et est un cas classique de flambement de coque.

On considère une coque peu profonde (i.e. faiblement courbée au repos) cylindrique de rayon de courbure  $R = 2540$  mm et de longueur  $l = 254$  mm. Son module de Young vaut  $E = 3102,75$  N/mm<sup>2</sup> et son coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ . Cette coque est encastree sur ses deux côtés droits.

On déforme la coque de la façon suivante :

- soit on applique une force ponctuelle au point central (pilotage en force),
- soit on force le déplacement de ce point (pilotage en déplacement).

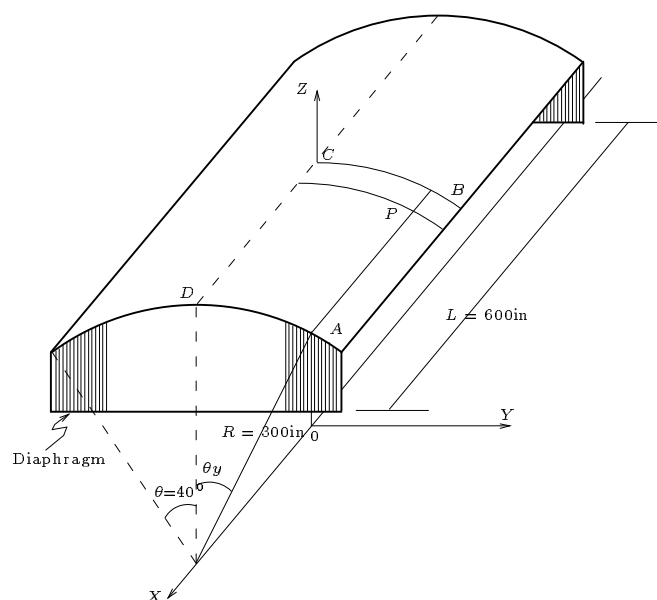
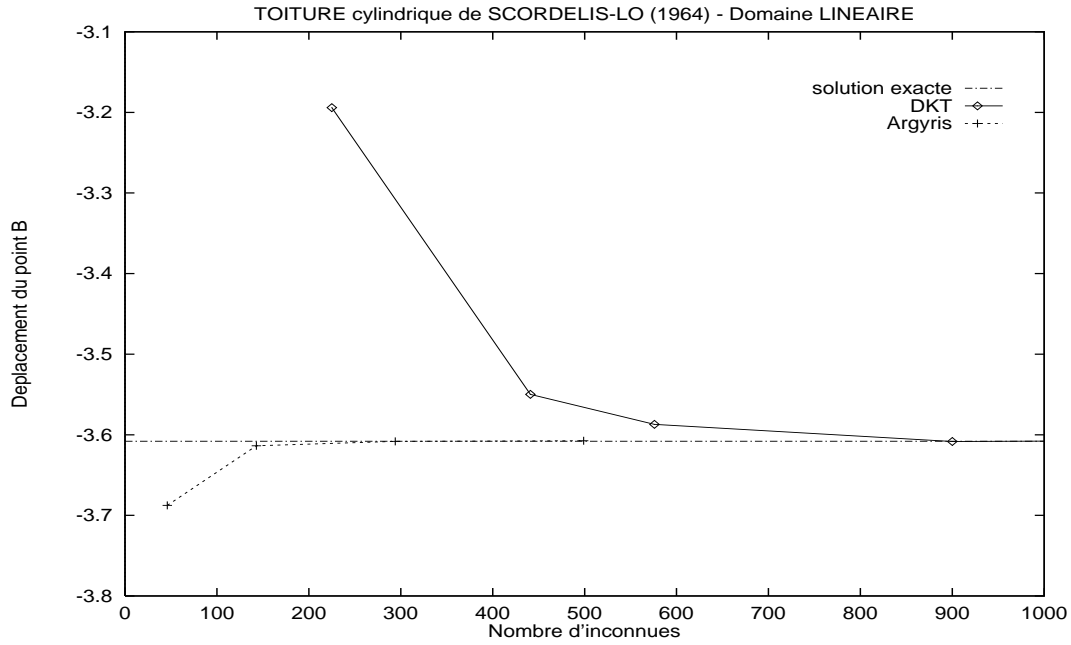


FIG. 4 - Toiture de Scordelis-Lo

FIG. 5 - *Solution linéaire*

Comme pour le test précédent, on n'étudie que le 1/4 de la coque et on fait le calcul pour 2 épaisseurs différentes  $e_1 = 6,35$  mm et  $e_2 = 12,7$  mm.

On s'intéresse notamment à la relation entre le déplacement du point central B, du point latéral C et la force ponctuelle appliquée en B (fig. 6).

Les résultats sont comparés aux résultats obtenus par Simo [16] et d'autres auteurs. On remarque que même pour un maillage relativement grossier (2 éléments Argyris ou 98 éléments DKT), les résultats sont tout à fait satisfaisants.

Dans le cas de l'épaisseur  $e_2$ , les résultats se dégradent un peu mais restent indépendants de l'élément fini. On atteint les limites du modèle de coque mince qui néglige les efforts de cisaillement dans l'épaisseur, hypothèse non valable pour des coques relativement épaisses (fig. 8).

Enfin, pour compléter ces résultats, nous avons représenté ci-dessous le nombre d'itérations et le temps calcul sur HP735 nécessaires pour obtenir les solutions d'équilibre pour les deux choix d'éléments finis au voisinage de points limites, ou pour les cas de déflexion maximale.

Les résultats sont très peu sensibles au choix de l'élément fini.

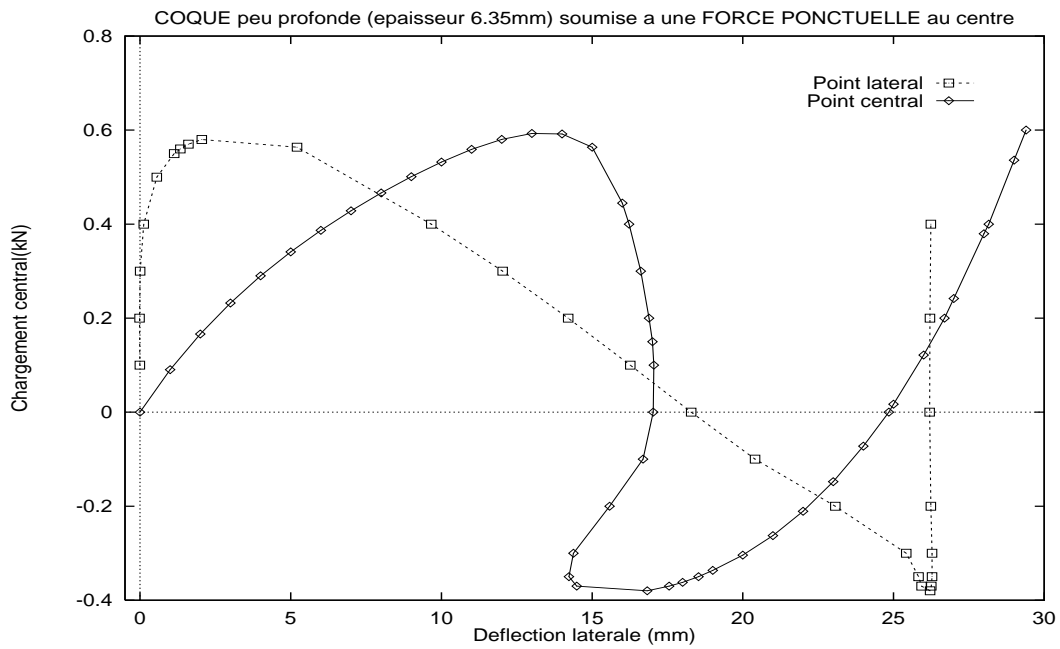


FIG. 6 - *Cas de flambement*

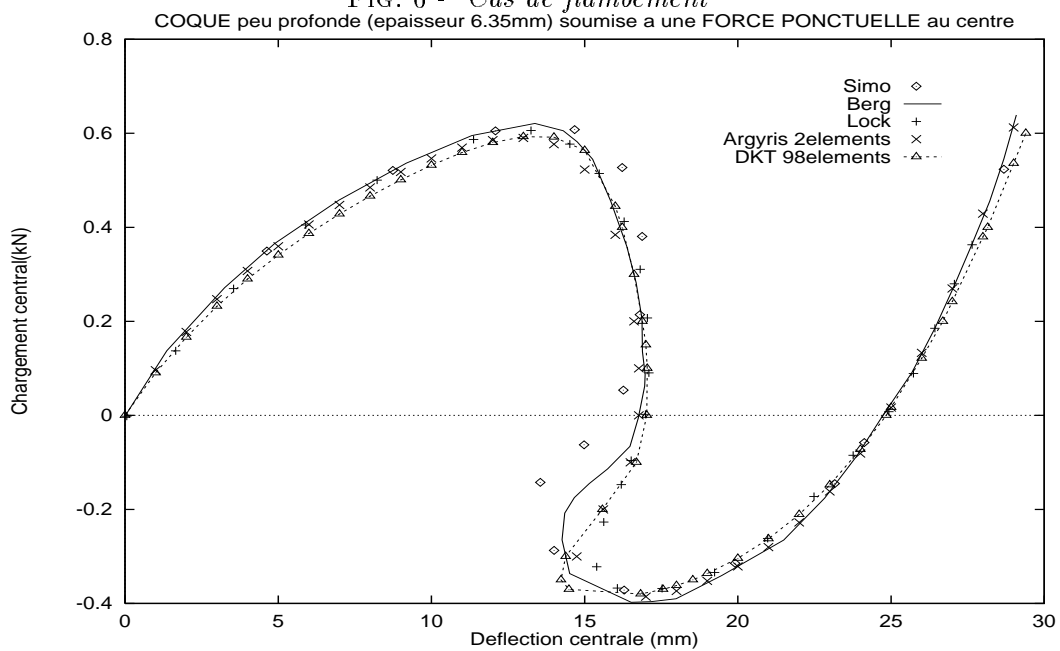


FIG. 7 - *Comparaison avec d'autres éléments*

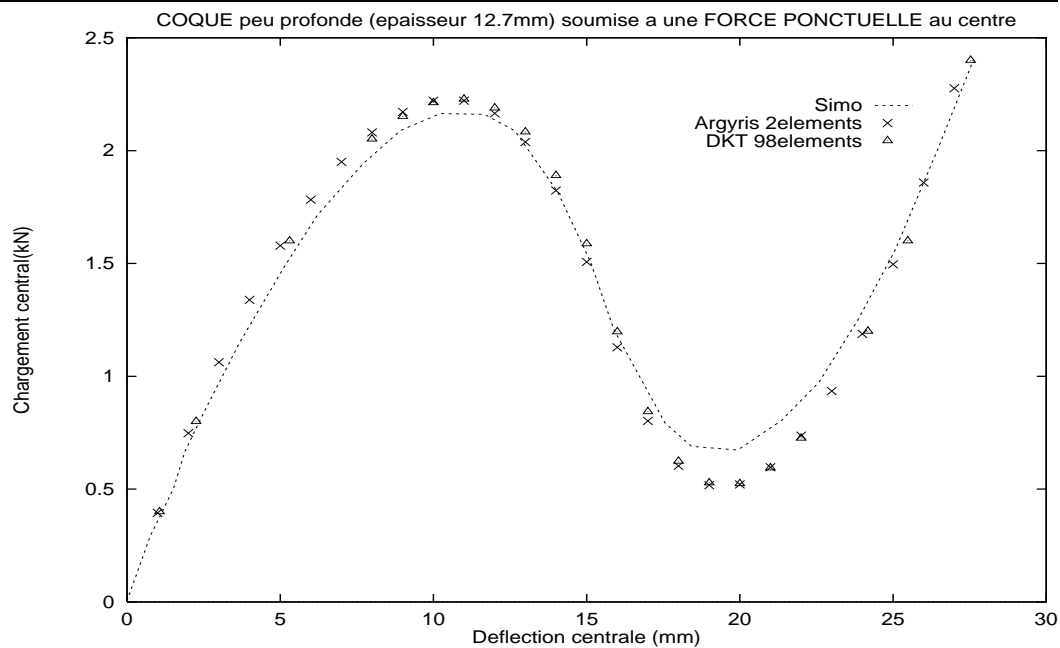


FIG. 8 - Toiture épaisse

Solution estimée	déflexion imposée	élt fini	iters	charget	CPU
$\phi_h^o$	30	Argyris	7	3.87	32.67s
		DKT	7	4.364	26.29s
$\phi_h^o$	20	Argyris	7	0.52	32.53s
		DKT	8	0.518	30.38s
$\phi_h^o$	10	Argyris	5	2.22	23.28s
		DKT	5	2.306	19.21s

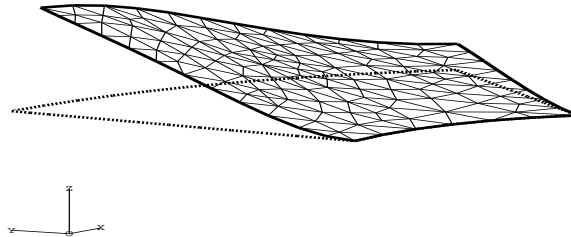


FIG. 9 - Déformée du clapet

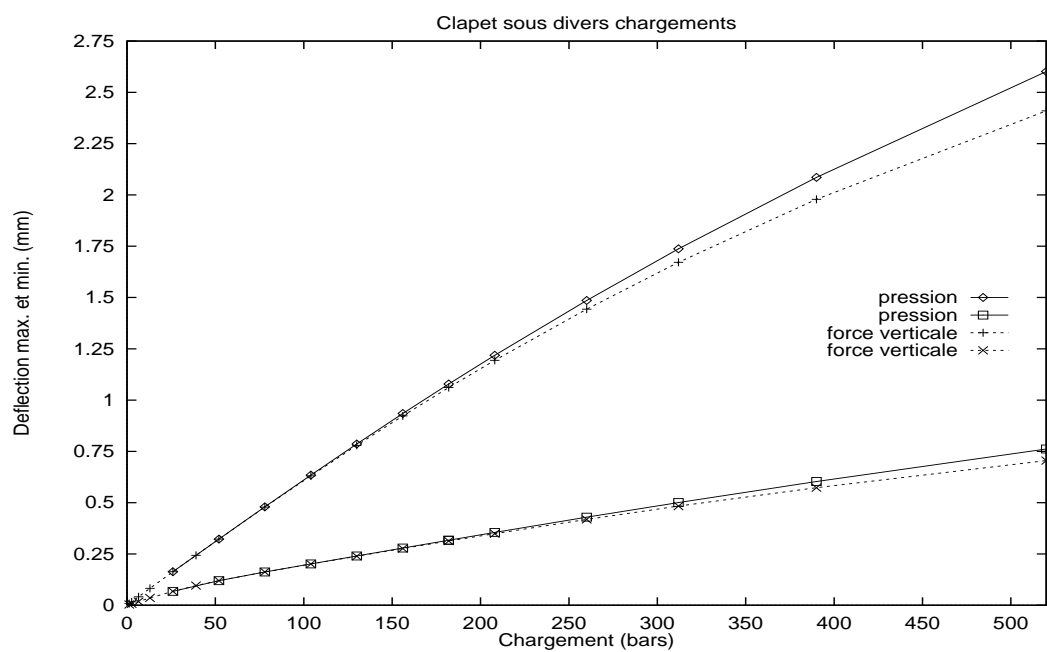
#### 4.4 Le clapet d'amortisseur

Cet exemple est caractéristique des structures déformables qui équipent les systèmes hydrauliques des automobiles. Il nous intéresse pour le problème de couplage fluide/structure évoqué en introduction.

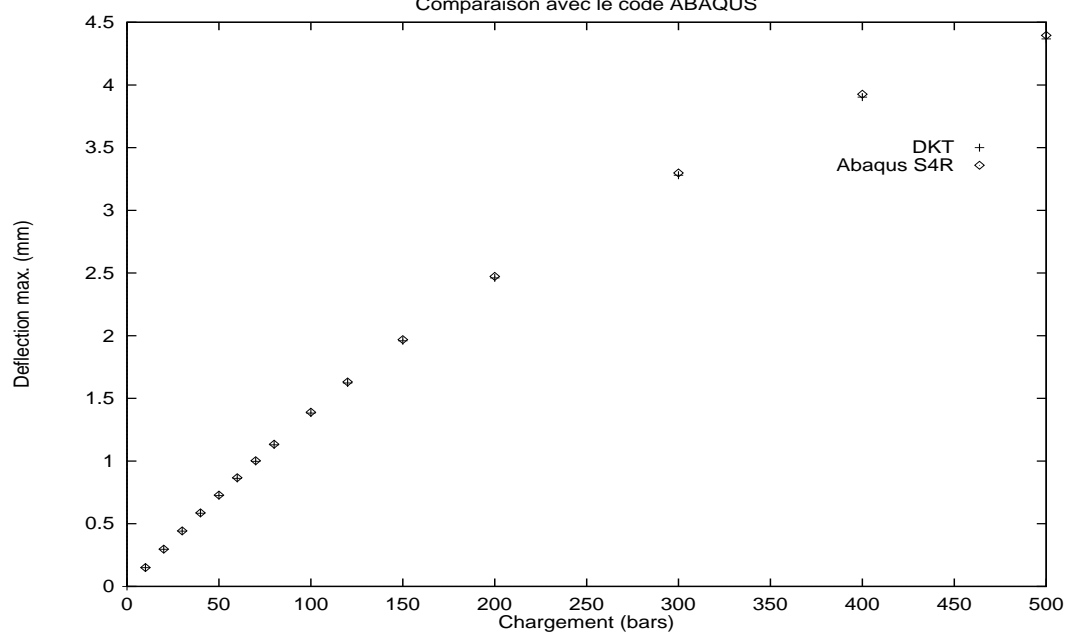
On considère un clapet ayant la forme d'un anneau plat de rayon intérieur  $r = 5$  mm, de rayon extérieur  $R = 10,5$  mm et d'épaisseur  $e = 0,2$  mm. Cet anneau est en acier trempé, de module de Young  $E = 621.000$  MPa et de coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  (caractéristiques communes aux aciers de trempe).

Ce clapet est serti sur tout son pourtour intérieur, liaison que nous assimilerons à une condition aux limites de type encastrement.

Sur 4 disques de rayon 2 mm disposés régulièrement sur cet anneau, on applique une force de pression uniforme. Etant donné les symétries de la géométrie et du chargement, on étudie seulement  $1/8$  du clapet.

FIG. 10 - *Déflexion*

Comparaison avec le code ABAQUS

FIG. 11 - *Test Abaqus*

Les grands déplacements et la zone d'application du chargement entraînent un couplage entre la résistance en flexion et la résistance en membrane. On s'intéresse à la déformée du clapet (fig. 9) sous 2 types de chargement :

- un effort dirigé perpendiculairement au clapet en position repos (effort assimilable à la gravité),
- un effort de pression (donc normal au clapet) (fig. 10).

On compare ces résultats à ceux obtenus avec le code ABAQUS et l'élément fini S4R (élément quadrangulaire type coque à facettes). Pour ce test, on prend un clapet de module de Young  $E = 210.000$  MPa et de coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ , pour une épaisseur  $e = 0,215$  mm (fig. 11).

Pour ce type de structure, on voit qu'on reste cohérent avec des modèles robustes testés dans l'industrie.

## 4.5 Conclusion

Les résultats obtenus avec le modèle de coques géométriquement exact et les éléments finis cartésiens associés montrent l'intérêt et la qualité de ce type d'approche : qualité puisqu'un bon nombre des problèmes classiques non linéaires de coque peuvent être résolus avec une bonne précision et à un coût en temps de calcul raisonnable ; intérêt car l'absence d'approximation de la géométrie garantit l'exactitude des déformations, ce qui est notamment primordial pour l'étude de problèmes d'interaction fluide-structure.

Les deux approximations proposées sont également robustes et couvrent une large gamme de problèmes. L'une est particulièrement adaptée à l'étude des structures géométriquement simples car nécessitant peu d'éléments (Argyris). L'autre est davantage dédiée à l'étude des coques aux formes compliquées nécessitant plus d'éléments (DKT).

## Références

- [1] J.L. BATOZ, P. GEOFFROY, *Evaluation d'un élément fini triangulaire pour l'analyse non linéaire statique de coques minces*, Rapport DRET/UTC n° 81/032 (1983).



- [2] BERNADOU M. [1994]: *Méthodes d'Eléments Finis pour des Problèmes de Coques Minces*, Collection RMA, Masson, Paris
- [3] CARRIVE M. [1990]: *Modélisation numérique de coques minces à l'aide d'éléments finis de classe  $C^\infty$* , rapport de stage de D.E.A. Université de Dauphine-I.N.R.I.A.
- [4] CARRIVE M. [1995]: *Analyse intrinsèque d'un modèle de coque géométriquement exact*, Thèse de doctorat de 3<sup>e</sup> cycle de l'université de Paris IX.
- [5] CIARLET P.G. [1987]: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam.
- [6] E. COSSERAT, F. COSSERAT, *Théorie des corps déformables*, Traité de Physique, Hermann, Paris (1909).
- [7] CRISFIELD M.A. [1990]: *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley and Sons, Chichester.New York.Brisbane.Toronto.Singapore.
- [8] G. DHATT, *An efficient triangular shell element*, AIAA J., Vol.8, n<sup>o</sup> 11 (1970) Vol.1 36p.
- [9] KOITER W.T. [1966]: *On the Non-linear Theory of Thin Elastic Shells*, Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, series B, 69, pp. 1-54.
- [10] LE TALLEC P. [1994]: *Numerical Methods for Nonlinear Three-dimensional Elasticity*. Handbook of Numerical Analysis, P.G. CIARLET et J.L. LIONS eds, North Holland, vol III, 465-621.
- [11] LYNESS J.N., JESPERSEN D. [1975]: *Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle*, J. Inst. Math. Appl.,15, pp. 19-32.
- [12] RIKS E. [1979]: *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*, Int. J. of Solids and Struc., Vol. 15, pp. 529-551.
- [13] RIKS E. [1990]: *Progress in Collapse Analyses*, National Aerospace Laboratory NLR, Amsterdam, The Netherlands.

- 
- [14] SABIR A.B. AND LOCK A.C. [1973]: *The Application of Finite Elements to the Large Deflexion Geometrically Non-linear Behaviour of Cylindrical Shells*, in Variational Methods in Engineering, Ed. C. A. Brebbia and H. Tottenham, Southampton University Press, 1973, pp. 7/66-7/75.
- [15] J.C. SIMO, D.D. FOX, M.S. RIFAI, *On a stress resultant geometrically exact shell model, Part I: Formulation and optimal parametrization*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 72 (1989) 267-304.
- [16] J.C. SIMO, D.D. FOX, M.S. RIFAI, *On a stress resultant geometrically exact shell model, Part III: Computational aspects of the nonlinear theory*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 79 (1990) 21-70.



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irista, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399